Сибирское отделение РАН • Институт гидродинамики
АКУСТИКА НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД
выпуск 105, 1992 г.

НОВЫЙ ТИП КОЛЛЕКТИВНЫХ ВОЗБУЖДЕНИЙ В "ЗВУКОВОМ ВАКУУМЕ"

В.Ф.Нестеренко

Распространение импульсов сжатия в материалах, где длинноволновая скорость звука c_0 равна нулю, либо мала по сравнению с фазовой скоростью возмущений, рассмотрено в [1-3]. Для таких сред в [2] введено понятие "звуковой вакуум", которое подчеркивает невозможность распространения в них линейных волн, описываемых стандартным волновым уравнением, либо их несущественность. Уравнение состояния в одномерном случае для таких упругих нелинейных сред $\sigma = b\xi^n$, $n > 1$, где σ - напряжение, $\xi > 0$ - деформация. В случае $n = 3/2$, существование уединенных волн нового типа обнаружено в численных расчетах, аналитически и экспериментально [1-3].

Для произвольного $n > 1$ наличие подобных стационарных решений найдено для длинноволнового уравнения [2]:

$$u_{tt} = -c_n^2 \left\{(-u_x)^n + \frac{na^2}{24}\left[(n-1)(-u_x)^{n-2}u_{xx}^2 - 2(-u_x)^{n-1}u_{xxx}\right]\right\}_x ,$$

$$\xi = -u_x > 0, \qquad (1)$$

где u - смещение, a - расстояние между частицами, c_n - константа с размерностью скорости.

Уравнение (1) может быть записано в эквивалентном виде, удобном для интегрирования:

$$u_{tt} = -c_n^2 \left\{(-u_x)^n + \frac{na^2}{6(n+1)}\left[(-u_x)^{\frac{n-1}{2}}\left[(-u_x)^{\frac{n+1}{2}}\right]_{xx}\right]\right\}_x . \quad (2)$$

Полезной формой записи уравнения (1) является также следующая:

$$u_{tt} = -c_n^2 \left\{(-u_x)^n + \frac{a^2}{12}\left[\left[(-u_x)^n\right]_{xx} - \frac{n(n-1)}{2}(-u_x)^{n-2}u_{xx}^2\right]\right\}_x . \quad (3)$$

По причине отмеченной в [4], более "предпочтительным" для волновых уравнений с пространственной дисперсией является замена старших производных по x на смешанную производную по x,t. Это сохраняет эквивалентность уравнений в рассматриваемом длинноволновом пределе, но избавляет в линейном случае от мнимых частот в дисперсионном соотношении когда $\lambda < \lambda_{min}$, хотя при этом ни то ни другое уравнение не могут быть корректно использованы. Уравнения (1-3) получены в пренебрежении конвективной производной.

Для эквивалентной замены старшей производной по x на смешанную, наиболее подходит уравнение (3). С его использованием может быть получено более "предпочтительное" уравнение:

$$u_{tt} = -\left\{c_n^2(-u_x)^n - \frac{a^2}{12}\left[u_{ttx} + \frac{c_n^2 n(n-1)}{2}(-u_x)^{n-2}u_{xx}^2\right]\right\}_x . \quad (4)$$

Уравнения (1-4) могут быть получены и с использованием вариационного подхода. Лагранжианы в обозначениях [4] равны соответственно для (1-3) - L_1 и для (4) - L_2:

$$L_1 = \frac{u_t^2}{2} - c_n^2\left\{\frac{(-u_x)^{n+1}}{n+1} + \frac{a^2}{2}\left[\frac{n}{4}(-u_x)^{n-1}u_{xx}^2 - \frac{1}{3}(-u_x)^n u_{xxx}\right]\right\},$$

$$L_2 = \frac{u_t^2}{2} + \frac{a^2}{24}u_{xt}^2 - c_n^2\left[\frac{(-u_x)^{n+1}}{n+1} - \frac{(-u_x)^n}{24}u_{xxx}\right].$$

Для возмущений с пространственно локализованной деформацией для L_1 и L_2 более предпочтителен вид:

$$L_1' = \frac{u_t^2}{2} - c_n^2 \left[\frac{(-u_x)^{n+1}}{n+1} - \frac{na^2}{24} (-u_x)^{n-1} \quad u_{xx}^2 \right],$$

$$L_2' = \frac{u_t^2}{2} + \frac{a^2}{24} u_{xt}^2 - c_n^2 \left[\frac{(-u_x)^{n+1}}{n+1} - \frac{n}{24} (-u_x)^{n-1} u_{xx}^2 \right].$$

Наконец, проведем наиболее простую формы записи уравнения (4) в деформациях:

$$\xi_{tt} = \left\{c_n^2 \xi^n + \beta\xi_{tt} - \gamma \xi^{n-2}\xi_x^2 \right\}_{xx},$$

$$\beta = \frac{a^2}{12}, \qquad \gamma = \frac{a^2 c_n^2}{24} n(n-1). \tag{5}$$

Интересно, что "коэффициент дисперсии" β имеет точно такой же вид как и для длинноволнового уравнения линейной цепочки частиц в том же приближении. Будет уместным отметить, что c_n не является длинноволновой скоростью звука c_0, выражение для которой имеет вид

$$c_0 = c_n \sqrt{n}\, \xi_0^{\frac{n-1}{2}}.$$

Можно получить стационарные решения $\xi(x-Vt)$ уравнений (1-3), что наиболее удобно сделать с использованием (2). В частности, имеется периодическое решение при константе интегрирования $C = 0$ и полной эффективной энергии $0 > W_0 \Rightarrow 0$ [1]:

$$\xi \Rightarrow \left\{ \frac{(n+1)}{2} \frac{V^2}{c_n^2} \right\}^{\frac{1}{n-1}} \left|sin \left[\frac{(n-1)}{(n+1)} \sqrt{\frac{6(n+1)}{n} \frac{(x-Vt)}{a}} \right]\right|^{\frac{2}{n-1}}. \tag{6}$$

Решение (6) имеет вид последовательности состыкованных в $\xi_0 \Rightarrow 0$ положительных горбов. При определенных значениях n, не требующих ограничения $-u_x = \xi > 0$ (например, $n = 3$), возможны и знакопеременные по ξ периодические волны.

Решения в виде уединенной волны существуют при величине константы интегрирования

$$0 < C < \frac{(n^2-1)}{2} n^{\frac{n}{1-n}} .$$

Физический смысл этих ограничений состоит в необходимости конечной, хотя и сколь угодно малой начальной деформации ξ_0 - (скорости звука c_0) и в сверхзвуковой $(V > c_0)$ природе уединенной волны. При $C \lesssim \frac{(n^2-1)}{2} n^{\frac{n}{1-n}}$ данные уединенные волны совпадают с солитонами *КдВ*. Если C близко к 0, что соответствует $\xi_{max} \gg \xi_0$, обнаруженные уединенные волны, являясь несущим тоном данной сильнонелинейной системы, качественно отличаются от солитонов *КдВ*. Вследствие чего они получили специальное название "нестоны" [2] и характеризуются следующей зависимостью фазовой скорости от ξ_{max} и характерной пространственной длиной L_n:

$$V = c_n \left(\frac{2}{n+1}\right)^{1/2} \left(\xi_{max}\right)^{\frac{n-1}{2}} ; \quad L_n = \frac{\pi a}{n-1} \sqrt{\frac{n(n+1)}{6}} .$$

Как и для уединенных волн уравнения с $n = 3/2$ [1] фазовая скорость и ширина "нестонов" при произвольном $n > 1$ не зависят от скорости звука c_0, в отличие от солитонов *КдВ*.

Отметим, что при $0 < n < 1$ уединенные волны сжатия для (1 - 4) отсутствуют, хотя возможны уединенные волны разрежения с деформацией в минимуме $0 < \xi_{min} < \xi_0$. Последние не существуют при $n > 1$ [1]. Среда с $0 < n < 1$ в определенном смысле противоположна "звуковому вакууму", т.к. в отличие от него $c_0 \to \infty$ при $\xi_0 \to 0$, и может моделировать структурные переходы, например, разрушение. Отмеченные выше ствойства делает данные среды своеобразными фильтрами волновых возмущений с определенным знаком изменения ξ.

Интересно исследовать соотношение между звуковыми волнами и "нестонами" при $n = 1 + \psi$, $\psi \ll 1$. Для этого случая можно записать:

$$c_0 = c_1 \xi_0^{\psi/2}, \quad V = c_1 \xi_{max}^{\psi/2}, \quad L_{1\psi} = \frac{\lambda_{min}}{\psi}, \quad \lambda_{min} = \frac{\pi a}{\sqrt{3}}.$$

Легко видеть, что при большой разнице ξ_{max} и ξ_0, если ψ достаточно мало, отличие c_0 и V будет невелико. Таким образом, отличие "нестона" от звука может быть несущественным при наблюдении его фазовой скорости. В то же время для первого характерна квантованность пространственного размера, отсутствующая для звуковой волны. Если $\frac{2}{n-1} = m$ – целое число, много большее 1, то в предположении, что форма "нестона" удовлетворительно описывается при $\xi \gg \xi_0$ периодическим решением (6), в нем присутствует гармоника с минимальной длиной волны $\lambda = \lambda_{min} = 1{,}8\ a$.

При больших $n \gg 1$, размер $L_n \Rightarrow \frac{\lambda_{min}}{\sqrt{2}} \approx 1{,}2\ a$. Естественно, что получение таких малых величин L_n ставит вопрос физической корректности использования континуального приближения. Однако не исключено, что данное формальное решение соответствует "нестону", состоящему из одной частицы, что может быть выяснено в численных расчетах соответствующей дискретной системы частиц, как это было сделано про $n = 3/2$, где $L \approx 5a$ [1].

Отметим, что при максимальной скорости частиц $v_{max} > V$ происходит "опрокидывание" "нестонов", что для реальных сред вряд ли соответствует какой-либо физической особенности, т.к. при этом не применимы исходные предположения, как было отмечено в [1] для цепочки упругих гранул. Эта особенность проявляется также за пределами ограничений использованных при выводе (1-5) и связанных с пренебрежением конвективной производной.

Обнаруженные уединенные волны, являясь решением длинноволнового уравнения, по сути есть коротковолновые возмущения как при $n \to 1$, так и при больших n. Это может обеспечить наибольшую плотность передачи информации данной дискретной средой при реализации "нестонного" режима ее работы. Возможно, что примерами такого поведения, кроме системы упругих гранул [1,3] могут быть среды с сильной зависимостью сжимаемости от деформации. Например, периодическая система металлических пластин с легкими упругими пористыми прокладками или молекулярные кристаллы. Другим примером могут быть поперечные колебания первоначально ненатянутой нити или мембраны. Возможно также, что передача импульсов по нервному волокну осуществляется в "нестонном" режиме. Действительно, вряд ли целесообразно, в том числе с энергетической точки зрения, поддерживать данное волокно в "напряженном" состоянии, обеспечивающем распространение импульса как слабого возмущения начального состояния, если существует возможность передачи импульсов с помощью "нестонного" механизма. Тем более что последний имеет определенные преимущества перед классическим линейным волновым случаем.

Автор благодарит В.М.Тешукова и В.А.Владимирова за конструктивные обсуждения результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. В.Ф.Нестеренко. Импульсное нагружение гетерогенных материалов. – Новосибирск: Наука. – 1992. – с.198.

2. В.Ф.Нестеренко. Нелинейные волны в "звуковом вакууме". – Физика горения и взрыва. – 1992. – № 3. – с.121–122.

3. А.Н.Лазариди, В.Ф.Нестеренко. Обнаружение уединенных волн нового типа в одномерной зернистой среде. – ПМТФ. – 1985. – № 3. – с.115–118.

4. Дж.Уизем. Линейные и нелинейные волны. – М.: Мир. – 1977. – с.622.